ISSN 2686-9667. Вестник российских университетов. Математика

Том 26, № 136 2021

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381
УДК 517.988.5

О проблеме существования неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения

Евгений Семенович ЖУКОВСКИЙ[1,2]

[1] ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет имени Г. Р. Державина»
392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

[2] ФГБУН «Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова» Российской академии наук
117997, Российская Федерация, г. Москва, ул. Профсоюзная, 65

Аннотация. Обсуждается остающийся до сих пор не решенным поставленный в [S. Reich, Some Fixed Point Problems, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 57:8 (1974), 194–198] вопрос о существовании в полном метрическом пространстве X неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения $\Phi : X \rightrightarrows X,$ имеющего замкнутые значения $\Phi(x) \subset X$ при всех $x \in X.$ Обобщенное сжатие понимается как естественное распространение определения Браудера–Красносельского этого свойства на многозначные отображения:

$$\forall x, u \in X \ \ h\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \leq \eta\big(\rho(x,u)\big),$$

где функция $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ возрастает, непрерывна справа и для всех $d > 0$ выполнено $\eta(d) < d$ (символом $h(\cdot,\cdot)$ обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в пространстве X). Приводится описание полученных в литературе утверждений, решающих проблему С. Райха при дополнительных требованиях на обобщенное сжатие $\Phi.$ В простейшем случае, когда многозначное обобщенно сжимающее отображение Φ действует в $\mathbb{R},$ без каких-либо дополнительных условий доказано существование у этого отображения неподвижной точки.

Ключевые слова: неподвижная точка, обобщенное сжатие, многозначное отображение в метрическом пространстве, теорема Браудера–Красносельского о неподвижной точке

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-04-60524_вирусы). Результаты § 2 получены автором в Институте проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН при поддержке Российского научного фонда (проект № 20-11-20131).

Для цитирования: *Жуковский Е.С.* О проблеме существования неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения // Вестник российских университетов. Математика. 2021. Т. 26. № 136. С. 372–381. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381.

DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381

On the existence problem for a fixed point of a generalized contracting multivalued mapping

Evgeny S. ZHUKOVSKIY[1,2]
[1] Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation
[2] V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS
65 Profsoyuznaya St., Moscow 117997, Russian Federation

Abstract. We discuss the still unresolved question, posed in [S. Reich, Some Fixed Point Problems, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur., 57:8 (1974), 194–198], of existence in a complete metric space X of a fixed point for a generalized contracting multivalued map $\Phi : X \rightrightarrows X$ having closed values $\Phi(x) \subset X$ for all $x \in X$. Generalized contraction is understood as a natural extension of the Browder–Krasnoselsky definition of this property to multivalued maps:

$$\forall x, u \in X \quad h\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \leq \eta\big(\rho(x,u)\big),$$

where the function $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ is increasing, right continuous, and for all $d > 0$, $\eta(d) < d$ ($h(\cdot,\cdot)$ denotes the Hausdorff distance between sets in the space X). We give an outline of the statements obtained in the literature that solve the S. Reich problem with additional requirements on the generalized contraction Φ. In the simplest case, when the multivalued generalized contraction map Φ acts in $\mathbb{R}$, without any additional conditions, we prove the existence of a fixed point for this map.

Keywords: fixed point, generalized contraction, multivalued map in metric space, the Browder–Krasnoselsky fixed point theorem

Acknowledgements: The research is supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 20-04-60524). The results § 2 were obtained by the author at the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS with the support of Russian Science Foundation (project no. 20-11-20131).

Mathematics Subject Classification: 47H10, 47H04.

For citation: Zhukovskiy E.S. O probleme sushchestvovaniya nepodvizhnoj tochki obobshchenno szhimayushchego mnogoznachnogo otobrazheniya [On the existence problem for a fixed point of a generalized contracting multivalued mapping]. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika – Russian Universities Reports. Mathematics*, 2021, vol. 26, no. 136, pp. 372–381. DOI 10.20310/2686-9667-2021-26-136-372-381. (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

В 2022 году исполнится 100 лет опубликования С. Банахом [1] теоремы существования в полном метрическом пространстве неподвижной точки сжимающего оператора (данный результат был получен С. Банахом двумя годами раньше в его диссертации). Эта теорема, получившая название принципа Банаха, остается одним из самых широко используемых в различных разделах математики инструментов анализа, продолжает являться источником многочисленных исследований (см., например, работу [2] о связи полноты метрического и обобщенно метрических пространств с существованием в них неподвижной точки сжатий, а также работы из обширного списка литературы к этой статье).

Напомним, что отображение φ метрического пространства (X,ρ) называют сжатием, если существует $\beta\in[0,1)$ такое, что при всех $x,u\in X$ выполнено неравенство

$$\rho\big(\varphi(x),\varphi(u)\big)\leq\beta\rho(x,u), \tag{0.1}$$

отображение φ в этом случае также называют β-сжимающим или β-сжатием. Согласно принципу Банаха всякое β-сжатие φ полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку — элемент $\xi\in X$ такой, что

$$\xi=\varphi(\xi),$$

к этой точке сходятся итерации $x_{i+1}=\varphi(x_i)$ с любым начальным элементом x_0, и выполнено неравенство

$$\rho(x_0,\xi)\leq\frac{1}{1-\beta}\rho\big(x_0,\varphi(x_0)\big). \tag{0.2}$$

Многозначный аналог этого утверждения получен в 1969 г. С. Б. Надлером (см. [3]). Многозначное отображение $\Phi:X\rightrightarrows X$ называют β-сжатием, $\beta\in[0,1)$, если при всех $x,u\in X$ выполнено неравенство

$$h\big(\Phi(x),\Phi(u)\big)\leq\beta\rho(x,u), \tag{0.3}$$

где символом $h(\cdot,\cdot)$ обозначено расстояние по Хаусдорфу между множествами в X. Для β-сжимающего многозначного отображения Φ полного метрического пространства X и такого, что множество $\Phi(x)\subset X$ замкнуто при любом $x\in X$, теорема Надлера утверждает существование неподвижной точки — элемента $\xi\in X$, удовлетворяющего включению

$$\xi\in\Phi(\xi).$$

Более того, для любого $x_0\in X$ и любого $\varepsilon>0$ может быть определена последовательность итераций $x_{i+1}\in\Phi(x_i)$, которая сходится к некоторой неподвижной точке ξ, причем

$$\rho(x_0,\xi)\leq\frac{1+\varepsilon}{1-\beta}\operatorname{dist}\big(x_0,\Phi(x_0)\big), \tag{0.4}$$

где $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ — расстояние от точки до множества, определяемое формулой

$$\forall x\in X\ \ \forall U\subset X\ \ \operatorname{dist}(x,U)=\inf_{u\in U}\rho(x,u).$$

Если значения многозначного отображения компактны, то оценка (0.4) справедлива при $\varepsilon=0$. В отличие от однозначных отображений, многозначные отображения могут иметь более одной неподвижной точки (см. утверждения о мощности множества неподвижных точек и точек совпадения в [4], а также [5, теорема 2.1.3]).

1. Некоторые обобщения теоремы Банаха и теоремы Надлера

Несмотря на то, что теорема Банаха известна уже 100 лет, а теорема Надлера — более 50 лет, не утихают попытки исследователей усилить и обобщить эти утверждения, ослабить предположения сжатия или аксиомы метрики. Содержательные результаты по теории неподвижной точки можно найти в монографии [6]); этой тематике целиком посвящены несколько известных научных журналов, в том числе: Journal of Fixed Point Theory and Applications (см. сайт), Fixed Point Theory (см. сайт), Fixed Point Theory And Algorithms For Sciences And Engineering — Fixed Point Theory And Applications до 2020 года (см. сайт). Коротко остановимся только на работах, имеющих непосредственное отношение к рассматриваемой здесь задаче об обобщенном сжатии.

Среди многочисленных распространений теорем Банаха и и Надлера на пространства с «ослабленными» метриками выделим статьи [7–10]), в которых исследовались сжатия в различных классах квазиметрических пространств, и работу [11], в которой получены аналоги теорем Банаха и Надлера в пространствах с векторными метриками и (см. также библиографии перечисленных здесь работ).

Многочисленные работы посвящены вопросу о существовании неподвижных точек при менее ограничительных, чем (0.1) и (0.3) условиях сжатия (см., например, [6, 12, 13]). Обсудим некоторые обобщения свойства сжатия. Для однозначных отображений наиболее известны результаты, полученные Ф. Э. Браудером [12] и в 1969 г. М. А. Красносельским [13, теорема 3.4]. Отображение $\varphi : X \to X$ называется обобщенным сжатием по Браудеру, если

$$\forall x, u \in X \quad \rho\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \le \eta\big(\rho(x, u)\big),$$

где функция $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (здесь и ниже $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$) удовлетворяет условию
(B) *функция η возрастает, непрерывна справа и при всех $d > 0$ выполнено $\eta(d) < d$.*
Отображение $\varphi : X \to X$ называется обобщенным сжатием по Красносельскому, если для некоторой функции $\gamma : (0, \infty) \times (0, \infty) \to [0, 1)$ справедливо соотношение

$$\forall R' \ge R > 0 \ \ \forall x, u \in X \ \ R \le \rho(x, u) \le R' \ \Rightarrow \ \rho\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \le \gamma(R, R')\rho(x, u).$$

Определенные таким образом обобщенные сжатия согласно теоремам Браудера и Красносельского имеют единственную неподвижную точку, и к ней сходятся итерации с любым начальным элементом. В [14, теорема 8] показано, что понятия обобщенного сжатия Браудера и Красносельского эквивалентны, а соответствующие теоремы о существовании неподвижной точки равносильны. Примерно одновременно с работами Ф. Э. Браудера и М. А. Красносельского аналогичную теорему о неподвижной точке обобщенного сжатия получили Д. В. Бойд и Дж. С. В. Вонг в [15].

Отметим, что в этих утверждениях не была предъявлена оценка отклонения неподвижной точки от произвольного $x_0 \in X$. Соответствующая оценка, совпадающая для «классического» сжатия с неравенством (0.2), получена в [16]. Распространению теорем Браудера и Красносельского на пространства с обобщенными метриками посвящены работы [17–19]. Теорема об обобщенном сжатии в f-квазиметрических пространствах, т. е. в пространствах с наименее ограничительными требованиями на расстояние, получена в [18].

Проблема распространения теорем об обобщенных сжатиях на многозначные отображения метрических пространств была рассмотрена С. Райхом в работах [20–22]. Многозначное отображение $\Phi : X \rightrightarrows X$ называется обобщенным сжатием, если

$$\forall x, u \in X \ \ h\big(\varphi(x), \varphi(u)\big) \le \eta\big(\rho(x,u)\big),$$

где функция $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет условию (B). В [20] показано, что если обобщенно сжимающее многозначное отображение Φ полного метрического пространства X имеет компактные значения $\Phi(x)$ при любом $x \in X,$ то неподвижная точка существует. В [21, 22] С. Райхом поставлен вопрос о существовании неподвижной точки отображения $\Phi,$ если его значения замкнуты. В [23] существование неподвижной точки замкнутозначного отображения доказано при дополнительном условии на функцию $\eta,$ в [24] также используются более обременительные условия на функцию $\eta,$ а значения $\Phi(x)$ предполагаются замкнутыми и ограниченными. Полностью данная проблема до сих пор не решена, т.е. в общем случае не доказана и не опровергнута гипотеза о существовании в полном метрическом пространстве неподвижной точки обобщенно сжимающего отображения с замкнутыми значениями.

Ниже дается положительный ответ на вопрос, поставленный С. Райхом, в простейшей ситуации, когда $X = \mathbb{R},$ но без дополнительных ограничений на функцию η и для случая замкнутости значений многозначного отображения. Также целью данной статьи является привлечение исследователей к решению задачи об обобщенном многозначном сжатии в общей постановке.

2. Существование неподвижной точки обобщенно сжимающего многозначного отображения в $\mathbb{R}$

Приведем вначале необходимое для исследования одно простое свойство функций $\eta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,$ удовлетворяющих условию (B) (уточним, что в этом условии возрастание понимается в широком смысле: $\eta(d) \ge \eta(r)$ при $d > r$). Обозначим через $\mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$ совокупность таких функций.

Свойство 2.1. *Для произвольной функции $\eta \in \mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$ и любых $R' \ge R > 0$ существует неотрицательное $\beta < 1,$ при котором для всех $r \in [R, R']$ справедливо неравенство*

$$\frac{\eta(r)}{r} \le \beta.$$

Доказательство. Пусть утверждение не верно. Тогда для некоторой последовательности $\{r_i\} \subset [R, R']$ выполнено

$$\frac{\eta(r_i)}{r_i} > \frac{i-1}{i}.$$

Из этой последовательности можно извлечь сходящуюся монотонную подпоследовательность, которую обозначим как и исходную последовательность $\{r_i\}.$ Пусть эта последовательность возрастает и сходится к $r.$ Тогда в силу возрастания функции η имеем

$$\frac{\eta(r)}{r} \ge \frac{\eta(r_i)}{r} = \frac{\eta(r_i)}{r_i}\frac{r_i}{r} > \frac{i-1}{i}\frac{r_i}{r} \ \Rightarrow \ \frac{\eta(r)}{r} \ge 1,$$

что противоречит неравенству $\eta(r) < r.$ Теперь пусть последовательность $\{r_i\}$ убывает и сходится к $r.$ Тогда в силу непрерывности справа функции η имеем

$$\frac{\eta(r)}{r} = \lim_{i\to\infty} \frac{\eta(r_i)}{r_i} = 1.$$

Снова получено противоречие с условием $\eta(r) < r$. $\square$

Пусть задано многозначное отображение $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$. Предполагаем, что при любом $x \in \mathbb{R}$ множество $\Phi(x) \subset \mathbb{R}$ не пусто и замкнуто.

О п р е д е л е н и е 2.1. Отображение $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ называют *обобщенно сжимающим* (или *обобщенным сжатием*), если существует функция $\eta \in \mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$ такая, что

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \ \ h\big(\Phi(x), \Phi(y)\big) \leq \eta\big(|x-y|\big)$$

([здесь через $h(\cdot,\cdot)$ обозначено расстояние по Хаусдорфу в $\mathbb{R}$).

Теорема 2.1. *Пусть отображение* $\Phi : \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ *является обобщенным сжатием. Тогда это отображение имеет неподвижную точку.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем предполагать, что Φ не имеет неподвижной точки.

Определим для каждого $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_*(x) = \sup\{y \in \Phi(x) \mid y < x\}, \quad \varphi^*(x) = \inf\{y \in \Phi(x) \mid y > x\}.$$

Очевидно, при любом $x \in \mathbb{R}$ выполнено $-\infty \leq \varphi_*(x) < x < \varphi^*(x) \leq \infty$, по крайней мере, одно из значений $\varphi_*(x), \varphi^*(x)$ конечно и

$$\varphi_*(x) > -\infty \ \Rightarrow \ \varphi_*(x) \in \Phi(x), \quad \varphi^*(x) < \infty \ \Rightarrow \ \varphi^*(x) \in \Phi(x).$$

Далее мы рассмотрим отображения $\varphi_*, \varphi^* : \mathbb{R} \to [-\infty, \infty]$ и из предположения, что Φ не имеет неподвижной точки, установим свойства этих отображений, противоречащие определению значений $\varphi_*(x)$, $\varphi^*(x)$.

Обозначим $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$ и определим на $\overline{\mathbb{R}}$ «обычное» расстояние $\rho(x,y) = |y-x|$, где операции с символами $-\infty, \infty$ определены соотношениями

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty - x = -\infty, \quad \infty - x = \infty, \quad x - \infty = -\infty,$$
$$\infty - (-\infty) = \infty, \quad -\infty - \infty = -\infty, \quad -\infty - (-\infty) = 0, \quad \infty - \infty = 0, \quad |-\infty| = \infty.$$

Вначале покажем, что отображения $\varphi_*, \varphi^* : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ непрерывны. Для произвольного $x \in \mathbb{R}$ положим

$$\delta^*(x) = \frac{\varphi^*(x) - x}{2}.$$

Для любых $\overline{\delta} \in (0, \delta^*(x)]$, $u \in (x, x+\overline{\delta}]$ выполнено $h(\Phi(u), \Phi(x)) \leq \eta(\overline{\delta}) < \overline{\delta}$. Следовательно множество $\Phi(u)$ должно содержать по крайней мере одну точку y_* такую, что $|y_* - \varphi_*(x)| \leq \eta(\overline{\delta})$, и для этой точки выполнено

$$y_* \leq \varphi_*(x) + \eta(\overline{\delta}) < x + \eta(\overline{\delta}) < x + \overline{\delta} \leq u.$$

Далее, множество $\Phi(u)$ должно содержать по крайней мере одну точку y^* такую, что $|y^* - \varphi^*(x)| \leq \eta(\overline{\delta})$, и для этой точки выполнено

$$y^* \geq \varphi^*(x) - \eta(\overline{\delta}) > \varphi^*(x) - \overline{\delta} \geq \varphi^*(x) - \delta^*(x) = x + \delta^*(x) \geq u.$$

Очевидно, что в множестве $\Phi(u)$ нет точек из интервала $\big(\varphi_*(x)+\eta(\overline{\delta}), \varphi^*(x)-\eta(\overline{\delta})\big)$. Таким образом, установлено, что

$$|\varphi_*(u) - \varphi_*(x)| \leq \eta(\overline{\delta}), \quad |\varphi^*(u) - \varphi^*(x)| \leq \eta(\overline{\delta}). \tag{2.1}$$

Если теперь определить

$$\delta_*(x) = \frac{x - \varphi_*(x)}{2},$$

то аналогично устанавливается, что для любых $\underline{\delta} \in (0, \delta_*(x)]$, $u \in [x - \underline{\delta}, x)$ выполнено

$$|\varphi_*(u) - \varphi_*(x)| \le \eta(\underline{\delta}), \quad |\varphi^*(u) - \varphi^*(x)| \le \eta(\underline{\delta}). \tag{2.2}$$

Если в случае $u > x$ положить $\overline{\delta} = u - x$, а при $u < x$ положить $\underline{\delta} = x - u$, то неравенства (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$x - \delta_*(x) \le u \le x + \delta^*(x) \ \Rightarrow\ |\varphi_*(u) - \varphi_*(x)| \le \eta(|x - u|), \quad |\varphi^*(u) - \varphi^*(x)| \le \eta(|x - u|). \tag{2.3}$$

Из неравенств (2.3) прямо следует непрерывность отображений $\varphi_*, \varphi^* : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Сформулируем еще некоторые свойства отображений φ_*, φ^*, необходимые для доказательства. В силу непрерывности этих отображений замечаем, что если в некоторой точке $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнено $\varphi^*(x_0) = \infty$, то $\varphi^*(x) = \infty$ при любом $x \in \mathbb{R}$, а в случае $\varphi_*(x_0) = -\infty$ выполнено $\varphi_*(x) = -\infty$ при любом $x \in \mathbb{R}$.

Определим отображения $f^*, f_* : \mathbb{R} \to (0, \infty]$ формулами

$$f^*(x) = \varphi^*(x) - x, \quad f_*(x) = x - \varphi_*(x).$$

Из соотношений (2.3) следует, что отображение f^* убывает. Действительно, для любых x, u таких, что $u > x$ и $u - x \le \overline{\delta}(x)$, имеем

$$f^*(u) - f^*(x) = \varphi^*(u) - \varphi^*(x) - (u - x) \le \eta(u - x) - (u - x) < 0.$$

Аналогично легко проверить, что отображение f_* возрастает.

Теперь рассмотрим две ситуации:

(I) только одно из отображений φ_*, φ^* принимает конечные значения,

(II) оба отображения φ_* и φ^* конечны.

(I). Пусть только одно из отображений φ_*, φ^* принимает конечные значения. Для определенности полагаем $\varphi_*(x) \equiv -\infty$ и $\varphi^*(x) < \infty$ при всех x. В этом случае для любых $x, u \in \mathbb{R}$ выполнено

$$h(\Phi(x), \Phi(u)) \ge \big|\varphi^*(x) - \varphi^*(u)\big|.$$

Поэтому функция $\varphi^* : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является обобщенным сжатием. Согласно теореме Браудэра эта функция имеет неподвижную точку.

(II). Пусть $-\infty < \varphi_*(x) < \varphi^*(x) < \infty$ при любом $x \in \mathbb{R}$. Определим итерации

$$u_0 = 0, \quad u_i = \frac{1}{2}\big(u_{i-1} + \varphi^*(u_{i-1})\big), \quad i = 1, 2, \dots .$$

Из соотношений

$$u_i - u_{i-1} = \frac{1}{2}\big(\varphi^*(u_{i-1}) - u_{i-1}\big) = \frac{1}{2} f^*(u_{i-1}) > 0$$

следует, что последовательность $\{u_i\}$ возрастает, а последовательность $\{u_i - u_{i-1}\}$ убывает.

Покажем, что $u_i - u_{i-1} \to 0$ при $i \to \infty$. В противном случае, существует $c > 0$ такое, что $u_i - u_{i-1} \geq c$. В то же время

$$u_i - u_{i-1} < u_1 - u_0 = \frac{1}{2} f^*(0).$$

Определим функцию $\overline{\eta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ равенством

$$\overline{\eta}(r) = \frac{1}{2}\big(r + \eta(r)\big).$$

Функция $\overline{\eta}$ непрерывна справа, возрастает и $\overline{\eta}(r) < r$ при любом $r > 0$, т. е. $\overline{\eta} \in \mathrm{CR}(\mathbb{R}_+)$. Согласно свойству 2.1 существует $\beta \in [0, 1)$, при котором для всех $r \in [c, 2^{-1} f^*(0)]$ справедливо неравенство

$$\frac{\eta(r)}{r} \leq \beta.$$

В силу соотношений (2.3) получаем

$$\begin{aligned} u_i - u_{i-1} &= \frac{1}{2}\big(u_{i-1} - u_{i-2} + \varphi^*(u_{i-1}) - \varphi^*(u_{i-2})\big) \\ &\leq \frac{1}{2}\big(u_{i-1} - u_{i-2} + \eta(u_{i-1} - u_{i-2})\big) = \overline{\eta}(u_{i-1} - u_{i-2}) \leq \beta(u_{i-1} - u_{i-2}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$u_i - u_{i-1} \leq \beta^{i-1}(u_1 - u_0) = \frac{\beta^{i-1}}{2} f^*(0),$$

следовательно, $u_i - u_{i-1} \to 0$ при $i \to \infty$.

Итак, определена возрастающая последовательность $\{u_i\}$, для которой $\varphi^*(u_i) - u_i \to 0$. Если эта последовательность ограничена, то она сходится $u_i \to u$, а вследствие непрерывности функции φ^* для ее предела выполнено $\varphi^*(u) = \lim_{i\to\infty} \varphi^*(u_i) = \lim_{i\to\infty} u_i = u$.

Пусть последовательность $\{u_i\}$ является неограниченной. В силу ее возрастания последовательность $\{f_*(u_i)\}$ также возрастает. Следовательно, $f_*(u_i) \geq f_*(0)$. Определим положительные числа

$$d = \frac{1}{2} f_*(0), \quad \varepsilon_0 = d - \eta(d).$$

Существует натуральное i_0, при котором выполнено $\varphi^*(u_{i_0}) - u_{i_0} \leq \varepsilon_0$. Для аргумента $x = u_{i_0} + d$ множество $\Phi(x)$ должно содержать точку y такую, что

$$|y - \varphi^*(u_{i_0})| \leq \eta(d) \tag{2.4}$$

(это прямое следствие обобщенного сжатия многозначного отображения Φ). Из неравенства (2.4) получаем

$$\begin{aligned} &y \leq \varphi^*(u_{i_0}) + \eta(d) \leq u_{i_0} + \varepsilon_0 + \eta(d) = u_{i_0} + d = x; \\ &y \geq \varphi^*(u_{i_0}) - \eta(d) \geq u_{i_0} - \eta(d) = u_{i_0} + d - d - \eta(d) = x - d - \eta(d) = x - 2d - \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Следовательно, для некоторого $y \in \Phi(x)$ выполнено

$$x \geq y > x - f_*(0) \geq x - f_*(x) = \varphi_*(x),$$

но существование такого y противоречит определению значения $\varphi_*(x)$. □

References

[1] S. Banach, "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales", *Fund. Math.*, **3** (1922), 133–181.

[2] С. Кобзаш, "Неподвижные точки и полнота в метрических и обобщённых метрических пространствах", *Фундаментальная и прикладная математика*, **22**:1 (2018), 127–215. [S. Kobzash, "Fixed points and completeness in metric and generalized metric spaces", *Fundam. Prikl. Mat.*, **22**:1 (2018), 127–215 (In Russian)].

[3] S. B. Nadler, "Multi-valued contraction mappings", *Pacific Journal of Mathematics*, **30**:2 (1969), 475–488.

[4] А. В. Арутюнов, Е. С. Жуковский, С. Е. Жуковский, "О мощности множества точек совпадения отображений метрических, нормированных и частично упорядоченных пространств", *Матем. сб.*, **209**:8 (2018), 3–28; англ. пер.:A. V. Arutyunov, E. S. Zhukovskiy, S. E. Zhukovskiy, "On the cardinality of the coincidence set for mappings of metric, normed and partially ordered spaces", *Sb. Math.*, **209**:8 (2018), 1107–1130.

[5] Ю. Г. Борисович, Б. Д. Гельман, А. Д. Мышкис, В. В. Обуховский, *Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальних включений*, 2-е изд., Либроком, М., 2011. [Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, V. V. Obukhovskii, *Introduction to the Theory of Multi-valued Mappings and Differential Inclusions*, 2nd ed., Librokom, Moscow, 2011 (In Russian)].

[6] A. Granas, J. Dugundji, *Fixed Point Theory*, Monograph, Springer–Verlag, New York, 2003.

[7] А. В. Арутюнов, А. В. Грешнов, " (q_1, q_2) -квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения", *Изв. РАН. Сер. матем.*, **82**:2 (2018), 3–32; англ. пер.:A. V. Arutyunov, A. V. Greshnov, " (q_1, q_2) -quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points", *Izv. Math.*, **82**:2 (2018), 245–272.

[8] И. А. Бахтин, "Принцип сжатых отображений в почти метрических пространствах", *Функциональный анализ*, **30** (1989), 26–37. [I. A. Bakhtin, "The principle of contracted mappings in almost metric spaces", *Functional Analysis*, **30** (1989), 26–37 (In Russian)].

[9] D. Panthi, K. Jha, G. Porru, "A fixed point theorem in dislocated quasi-metric space", *American Journal of Mathematics and Statistics*, **3**:3 (2013), 153–156.

[10] Т. В. Жуковская, В. Мерчела, А. И. Шиндяпин, "О точках совпадения отображений в обобщенных метрических пространствах", *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:129 (2020), 18–24. [T. V. Zhukovskaya, W. Merchela, A. I. Shindyapin, "On coincidence points of mappings in generalized metric spaces", *Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:129 (2020), 18–24 (In Russian)].

[11] Е. С. Жуковский, Е. А. Панасенко, "О неподвижных точках многозначных отображений в пространствах с векторнозначной метрикой", Выпуск посвящен 70-летнему юбилею Александра Георгиевича Ченцова, Тр. ИММ УрО РАН, **24**, 2018, 93–105; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, E. A. Panasenko, "On fixed points of multivalued mappings in spaces with a vector-valued metric", *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, **305**:suppl. 1 (2019), S191–S203.

[12] F. E. Browder, "On the convergence of successive approximations for nonlinear functional equations", *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A.*, **71** (1968), 27–35.

[13] М. А. Красносельский, Г. М. Вайнико, П. П. Забрейко, Я. Б. Рутицкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969. [M. A. Krasnoselsky, G. M. Vainiko, P. P. Zabreiko, Ya. B. Rutitskiy, V. Ya. Stetsenko, *Approximate Solution of Operator Equations*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russian)].

[14] J. Jachymski, "Around Browder's fixed point theorem for contractions", *J. Fixed Point Theory Appl.*, **5**:1 (2009), 47–61.

[15] D. W. Boyd, J. S. W. Wong, "On nonlinear contractions", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **89** (1968), 458–464.

[16] Е. С. Жуковский, "Замечание к теоремам об обобщенном сжатии", *Матем. заметки*, **111**:2, (в печати) (2022), 211–218. [E. S. Zhukovsky, "A note on generalized compression theorems", *Mat. notes*, **111**:2, (to appear) (2022), 211–218 (In Russian)].

[17] А. И. Перов, "Многомерная версия принципа обобщенного сжатия М. А. Красносельского", *Функциональный анализ и его приложения*, **44**:1 (2010), 83–87; англ. пер.:A. I. Perov,

"Multidimensional version of M. A. Krasnosel'skii's generalized contraction principle", *Funct. Anal. Appl.*, **44**:1 (2010), 69–72.

[18] Е. С. Жуковский, "Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств", *Сиб. матем. журн.*, **59**:6 (2018), 1338–1350; англ. пер.:E. S. Zhukovskiy, "The fixed points of contractions of f-quasimetric spaces", *Siberian Math. J.*, **59**:6 (2018), 1063–1072.

[19] Т. В. Жуковская, Е. С. Жуковский, "Об одном квазиметрическом пространстве", *Вестник Тамбовского университета. Серия: естественные и технические науки*, **22**:6 (2017), 1285–1292. [T. V. Zhukovskaya, E. S. Zhukovskiy, "About one quasi-metric space", *Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **22**:6 (2017), 1285–1292 (In Russian)].

[20] S. Reich, "Fixed points of contractive functions", *Italian Mathematical Union. Bulletin*, **5**:4 (1972), 26–42.

[21] S. Reich, "Some fixed point problems", *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur.*, **57**:8 (1974), 194–198.

[22] S. Reich, "Some problems and results in fixed point theory", *Contemporary Mathematics AMS*, **21** (1983), 179–187.

[23] П. В. Семенов, "О неподвижных точках многозначных сжатий", *Функц. анализ и его прил.*, **36**:2 (2002), 89–92; англ. пер.:P. V. Semenov, "Fixed points of multivalued contractions", *Funct. Anal. Appl.*, **36**:2 (2002), 159–161.

[24] P. Z. Daffer, H. Kaneko, W. Li, "On a conjecture of S. Reich", *Proceedings of the American Mathematical Society*, **124**:10 (1996), 3159–3162.

Информация об авторе

Жуковский Евгений Семенович, доктор физико-математических наук, профессор, директор научно-исследовательского института математики, физики и информатики. Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов; ведущий научный сотрудник. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, г. Москва, Российская Федерация. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Поступила в редакцию 03.10.2021 г.
Поступила после рецензирования 20.11.2021 г.
Принята к публикации 27.11.2021 г.

Information about the author

Evgeny S. Zhukovskiy, Doctor of Physics and Mathematics, Professor, Director of the Research Institute of Mathematics, Physics and Informatics. Derzhavin Tambov State University, Tambov; Leading Researcher. V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of RAS, Moscow, Russian Federation. E-mail: zukovskys@mail.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4460-7608

Received 03.10.2021
Reviewed 20.11.2021
Accepted for press 27.11.2021